Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2011/12
Lista 14 (+ uzupełnienie)

23/12/11

MATERIAŁ DODATKOWY
Miary z gęstością

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią miarową (dowolną) i niech $f : X \to [0, \infty]$ będzie funkcją mierzalną. Ponieważ jest ona nieujemna, to jest ona całkowalna (w sensie niewłaściwym) po dowolnym zbiorze $E \in \mathcal{B}$. Definiujemy nową miarę (tzw. miarę z gęstością) na tym samym sigma-ciele $\mathcal{B}$, wzorem

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu.$$

W jednym z poprzednich zadań mieliśmy sprawdzić, że jest to rzeczywiście miara. Brakowało nam ciągłości z dołu. Teraz to uzupełnimy korzystając z Tw. Lebesgue'a. Niech E_n będzie wstępującym ciągiem zbiorów o sumie E. Mamy pokazać, że $\mu_f(E_n) \to \mu_f(E)$, czyli że

$$\int_{E_n} f \, d\mu \to \int_E f \, d\mu.$$

Ale to wynika wprost z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, gdyż funkcje podcałkowe z lewej strony to $\mathbf{1}_{E_n} f$ i one są nieujemne oraz zbiegają niemalejąco do $\mathbf{1}_E f$, która jest funkcją podcałkową z prawej strony.

A teraz nauczymy się całkować funkcje miarą z gęstością.

Twierdzenie. Niech g będzie dowolną funkcją mierzalną. Wtedy

$$\int g \, d\mu_f = \int gf \, d\mu,$$

o ile ta druga całka ma sens.

Dowód: Jeśli g jest funkcją charakterystyczną jakiegoś zbioru mierzalnego E, to prawa strona to $\mu_f(E)$ a lewa pokrywa się z definicją miary $\mu_f(E)$, a więc równość jest prawdziwa. Dla funkcji prostych $g = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i}$ mamy

$$\int g \, d\mu_f = \int \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i} \, d\mu_f = \sum_{i=1}^n a_i \, \mu_f(E_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \mathbf{1}_{E_i} f \, d\mu = \text{(liniowość całki)}$$
$$= \int \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i} f \, d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i} \right) f \, d\mu = \int gf \, d\mu.$$

Teraz dla funkcji mierzalnych nieujemnych: każda taka funkcja g, jak wiemy, jest granicą (wszędzie) ciągu niemalejącego nieujemnych funkcji prostych g_n. Zauważmy, że wtedy funkcje $g_n f$ również są nieujemne i zbiegają niemalejąco do gf. Zatem, z ,,monotonicznego" tw. Lebesgue'a zastosowanego dwa razy, a w środku z tego że naszą równość udowodniliśmy już dla funkcji prostych, mamy

$$\int g\, d\mu_f = \int \lim_n g_n\, d\mu_f = \lim_n \int g_n\, d\mu_f = \lim_n \int g_n f\, d\mu = \int \lim_n g_n f\, d\mu = \int gf\, d\mu.$$

Wreszcie dla funkcji znakowanej zauważamy, że ponieważ f jest nieujemna, to $(gf)^+ = g^+ f$ (i podobnie dla minusów), a zatem, korzystając z udowodnionego już wzoru dla funkcji nieujemnych, mamy

$$\int g\, d\mu_f = \int g^+\, d\mu_f - \int g^-\, d\mu_f = \int g^+ f\, d\mu - \int g^- f\, d\mu =$$
$$\int (gf)^+\, d\mu - \int (gf)^-\, d\mu = \int gf\, d\mu,$$

co ma sens wtedy i tylko wtedy gdy jedna z całek występujących w ostatniej różnicy jest skończona. Ale pierwsza i ostatnia różnica mają de facto te same składniki, czyli ostatnia całka (miarą μ) ma sens wtedy i tylko wtedy gdy ma sens całka pierwsza (miarą μ_f). $\square$

ZADANIA

Zadanie 1a.
Niech μ oznacza miarę borelowską na prostej, skończoną na przedziałach skończonych i taką, że jej dystrybuanta jest nie tylko ciągła ale i różniczkowalna w każdym punkcie. Udowodnij, że wtedy μ jest miarą z gęstością: $\mu = \lambda_f$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a a $f = F'$ (F' oznacza pochodną z dystrybyanty).

Zadanie 1b.
Na odwrót. Niech λ oznacza miarę Lebesgue'a na prostej, a f niech będzie nieujemną funkcją mierzalną na prostej taką, że całka po każdym przedziale skończonym jest skończona. Udowodnij, że wtedy dystrybuanta F miary λ_f jest funkcją pierwotną funkcji f (Uwaga! Trzeba osobno rozważyć przypadki $x \geq 0$ i $x < 0$).

Zadanie 2.
Niech μ będzie miarą na prostej zadaną w następujący sposób: poza $[-1, 3]$ jest to miara zerowa, na przedziale $[0, 2]$ jest to miara Lebesgue'a z gęstością $f(x) = \sqrt{2-x}$, dodatkowo miara ta ma atomy w punktach $-1, 1, 3$, każdy o masie $\frac{1}{2}$. Narysuj (i opisz wzorami) dystrybuantę miary μ.

Zadanie 3.
Dystrybuanta miary μ na prostej jest zero dla $x < 1$ a dla $x \geq 1$ zgadza się z wykresem funkcji $F(x) = \sqrt{x}$. Jaka to miara?

Zadanie 4.
a. Udowodnij następujące twierdzenie dla przestrzeni z miarą skończoną: ciąg f_n

funkcji mierzalnych zbiega według miary do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego podciągu f_{n_k} można wybrać podciąg zbieżny do f prawie wszędzie.
b. Jedna implikacja (która?) zachodzi również dla miar nieskończonych. Podaj przykład na to, że założenie o skończoności miary jest istotne dla drugiej implikacji.

Zadanie 5.
Niech μ będzie miarą z zadania 2. Oblicz całkę z funkcji $g(x) = x\sqrt{2+x}$ dla $x \geq -2$ i zero poza tym.

Zadanie 6.
Czy funkcja $g(x) = \frac{1}{x}$ jest całkowalna (czy całka ma sens)
a. miarą Lebesgue'a na przedziale $[-1, 1]$?
b. miarą Lebesgue'a z gęstością $f(x) = \max\{x, 0\}$ na przedziale $[-1, 1]$?

Zadanie 7.
Niech f_n będzie dowolnym ciągiem funkcji nieujemnych na dowolnej przestrzeni miarowej. Uzasadnij, dlaczego zawsze zachodzi równość

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Zadanie 8.
Niech $f_n = \frac{\sin(\ln|x|)}{n(x^2+1)}$. Do czego zbiegają całki z tych funkcji?

Zadanie 9.
Niech $f_1 = \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) \cos x$ i niech $f_n(x) = \frac{1}{n} f_1(\frac{x}{n})$. Zauważ, że funkcje f_n są nieujemne i zbiegają w każdym punkcie do zera. Czy zachodzi którekolwiek z twierdzeń Lebesgue'a?
Wsk. Najpierw narysuj te funkcje, żeby wyczaić o co tu chodzi.

Zadanie 10.
Niech λ będzie miarą Lebesgue'a na prostej, a ν niech oznacza miarę liczącą na $\mathbb{N}$. Jaka jest miara produktowa koła $x^2 + y^2 \leq 9$?
Wsk. Najpierw musisz ,,wyobrazić sobie" tę miarę produktową, zrozumieć, jak ona działa. Wtedy obliczenia staną się proste (z pomocą rysunku).

Zadanie 11.
Na zbiorze $\mathbb{R} \times ([-1, 1] \setminus \{0\})$ z miarą produktową $\lambda \times \lambda$ dana jest funkcja $f(x, y) = \frac{|y|}{y}$. Tylko jedna z całek iterowanych ma sens. Która? Czy można stosować twierdzenie Fubiniego?

Zadanie 12.
Oblicz całkę z funkcji $f(x, y) = x^y$ miarą produktową Lebesgue'a po zbiorze $[0, 1] \times [0, 1]$. Czy można stosować twierdzenie Fubiniego? Spróbuj obu całek iterowanych i zauważ, jak różnią się stopniem trudności!

Tomasz Downarowicz